Nome e Cognome: .... Orale all'appello: □3 □4

Durata: 2 ore e 30 minuti. Non è possibile usare appunti o aiuti elettronici. Scrivere le soluzioni in questi fogli.

Esercizio 1 Siano

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} s \\ 3s \\ 6s^3 \end{pmatrix} : s \in \mathbb{R} \right\}, \quad T = \left\{ \begin{pmatrix} s \\ 3s \\ 6t \end{pmatrix} : s, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

1. Dire se S è uno spazio vettoriale e se lo è calcolarne la dimensione. Dire se T è uno spazio vettoriale e se lo è calcolarne la dimensione.

2. Dato $\langle \, , \, \rangle$ il prodotto scalare standard in $\mathbb{R}^3$ calcolare una base degli spazi vettoriali

$$S' = \{ v \in \mathbb{R}^3 : \langle v, w \rangle = 0 \text{ per ogni } w \in S \}, \quad T' = \{ v \in \mathbb{R}^3 : \langle v, w \rangle = 0 \text{ per ogni } w \in T \}.$$

Esercizio 2 Sia $W = \{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2 : y = 0 \}$ il primo asse di $\mathbb{R}^2$. Dentro $M_{2,2}(\mathbb{R})$, isomorfo a $\mathbb{R}^4$, sia

$$S = \left\{ A \in M_{2,2}(\mathbb{R}) : \; A \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) = A \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \quad \text{e} \quad A \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \in W \right\}.$$

1. Calcolare una base di S.
2. Trovare una base del piú piccolo sottospazio vettoriale di $M_{2,2}(\mathbb{R})$ che contiene $T = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) + \mathrm{Span}(\left(\begin{smallmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 3 \end{smallmatrix}\right))$.

Esercizio 3 Sia

$$F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4\,, \quad F(v) = \left(\left\langle v, \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)\right\rangle, \left\langle v, \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)\right\rangle, \left\langle v, \left(\begin{smallmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{smallmatrix}\right)\right\rangle, \left\langle v, \left(\begin{smallmatrix} -4 \\ -2 \\ -4 \end{smallmatrix}\right)\right\rangle\right)$$

1. Calcolare dimensione del kernel e dell'immagine di F.
2. Sia $W = \mathrm{Span}\left(\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 4 \\ 5 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)\right)$. Calcolare la dimensione dell'ortogonale di $F(W)$ in $\mathbb{R}^4$.

Esercizio 4 Sia V lo spazio di matrici $M_{2,2}(\mathbb{R})$, che é isomoorfo a $\mathbb{R}^4$. Sia $F\colon V \to V$ l'endomorfismo che manda una matrice A in

$$F(A) = A - 3A^t.$$

1. F è diagonalizzabile? In caso esibire una base diagonalizzante.
2. Per quali λ in $\mathbb{R}$ la funzione $F_\lambda(A) = F(A) + \lambda A$ è invertibile?